ACTES DE LES IV TROBADES D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
(ALCOI-BARCELONA, SCHCT, 1997), 503-509

200 ANYS DE LA REPRESENTACIÓ GEOMÈTRICA DELS IMAGINARIS

Carles Gámez
Departament de Física Fonamental. Universitat de Barcelona

Paraules clau: arrel imaginaria, nombres complexos, representació geomètrica, Wessel, Argand, Annales, Français, Rey.

200 years of the imaginary geometrical representation

Summary: *In coincidence with the 200 birthday of the first Geometrical Representation of imaginary roots and complex numbers, realised by the Norwegian topographer Caspar Wessel, we explain you the history of imaginary quantities. This paper studies the earlier attempts of build a geometrical interpretation of imaginary made for Wessel and J.-R. Argand. Wessel's essay was historically the first attempt and Argand's one influenced others mathematicians. Finally, we analyse the book of the spanish logic J. M. Rey y Heredia about the geometrical representation of imaginary.*

Key words: *imaginary root, complex numbers, geometrical representation, Wessel, Argand, Annales, Français, Rey.*

Coincidint amb el 200 aniversari de la presentació pel noruec Caspar Wessel, de la primera obra que introdueix d'una manera coherent la representació geomètrica de les quantitats imaginàries, s'escau aprofundir en la història que va envoltar l'acceptació dels imaginaris com a entitats matemàtiques, per part de la comunitat científica. La línia general d'exposició que seguirem, està basada en un estudi cronològic del desenvolupament matemàtic. D'aquesta manera, els fets aniran apareixent cronològicament, acompanyats de les connotacions epistemològiques i sociològiques que els van envoltar.

1. Introducció històrica

Els nombres imaginaris estan genèticament connectats amb les arrels parelles dels nombres negatius, en concret amb l'operació $\sqrt{(-1)}$. La primera aparició d'arrels imaginàries dins la matemàtica occidental, té lloc a l'Edat de Plata de la matemàtica grega dins l'obra d'Herò d'Alexandria (s. I a.C.), que transforma $\sqrt{81-144}$ en $\sqrt{144-81}$. Diofant (s. I-II d.C.) per la seva banda, omet el problema de les arrels de nombres negatius, tot i trobar-s'hi. Tots dos arriben a aquestes decisions ressolent problemes aritmètics particulars, per la impossibilitat d'interpretació geomètrica (Lizcano, 1993: 256). La geometria clàssica es converteix així en un obstacle per a l'acceptació dels imaginaris.

No serà fins a finals del Renaixement, que l'imaginarisme apareix en les discussions matemàtiques sobre la resolució general de les equacions de tercer i quart grau, observades als treballs de Niccolo Tartaglia (1500-1557) i el seu rival, Jerónimo Cardano (ca. 1501-1576). Cardano utilitzà les arrels imaginàries de forma sistemàtica per a l'obtenció de solucions reals, tot i no considerar-les com a solucions propies de les equacions, al prendre-les com a impossibles. Poc després, Rafael Bombelli (ca. 1526-1573) va ser el primer creador de simbologia imaginària. Entre d'altres arribà a una expressió equivalent a l'actual $i=\sqrt{(-1)}$, deduint $i^2=-1$ i a l'expressió imaginària general $a + ib$.

Al segle XVII van tenir lloc els primers intents d'introduir la perpendicularitat en la representació de $\sqrt{(-1)}$, realitzats pel britànic John Wallis (1616-1703). Aquest va concebir les arrels imaginàries com «fora de línia», i fou el primer a plantejar-se una representació bidimensional dels nombres imaginaris.

El gran desenvolupament rebut per l'àlgebra durant els segles XVII i XVIII, permeté trencar l'encorsetament de la Geometria Clàssica a la resolució general de problemes. Això portarà a considerar les arrels imaginàries com a veritables solucions d'algunes equacions. Molts matemàtics de l'època, utilitzaran els imaginaris com aplicacions pràctiques. Això portà a intentar demostrar el conegut Teorema Fonamental de l'Àlgebra per poder validar els imaginaris (Pla, 1992). Es van realitzar diferents intents per matemàtics tan eminents com D'Alembert, Laplace, Euler o Gauss, que dedicà gairebé cinquanta anys a aquesta temàtica en diferents intents tot i no arribar mai a una demostració plenament algèbrica.

Leonhard Euler (1707-1783) per altra part, va intentar esbrinar més coses al camp dels complexos. El seu estudi sobre la resolució dels logaritmes de nombres complexos, li va permetre validar aquestes quantitats pel càlcul. Euler va trobar que el logaritme d'un nombre imaginari dóna lloc a infinites solucions, la majoria d'elles imaginàries. Entre d'altres, Euler va deduir l'expressió $e^{\pm iv}=\cos v \pm \text{sen } v$, a partir de la fòrmula de De Moivre de la exponenciació de la notació imaginària en polars. Amb tot, fins a Carl F. Gauss (1777-1855), ningú es plantejà la utilització de sistemes coordenats per representar les quantitats complexes. Per això el pla complex es coneix com a «Pla de Gauss».

2. Wessel i la representació de la direcció

La primera obra que mostrà amb coherència la representació geomètrica al pla bidimensional dels nombres imaginaris, va ser la memòria presentada a la Reial Acadèmia Danesa pel noruec Caspar Wessel (1745-1818) l'any 1797, amb el títol *«Om Direktionens analytiske Betegning»*. L'obra, en estar escrita en danés, restà desconeguda per a tots els matemàtics de l'època, fins a l'any 1897 quan fou republicada, traduïda al francès.

En el nou context matemàtic de finals del segle XVIII, Wessel és el primer a interpretar geomètricament de manera coherent les operacions algèbriques. A l'inici de la seva memòria l'autor expressa la intenció de presentar un mètode analític per les direccions espacials (Wessel, 1897: 1}. Per això utilitzarà les operacions algèbriques suma i producte, obtenint així de manera natural les quantitats imaginàries sense necessitat de definicions incomprensibles. El veritable valor d'aquesta memòria, resideix a la consecució per part de Wessel d'una metodologia rigorosa i concisa per poder representar i estudiar analíticament l'espai bidimensional.

La primera operació analitzada per Wessel és la suma de direccions, definida com actualment coneixem la regla d'addició de vectors. Però això no representà cap novetat significativa respecte de treballs anteriors com els de Newton. El punt de partida fonamental de tota la memòria, el constitueix el producte entre segments i la seva interpretació geomètrica. Nogensmenys, la noció d'arrel requereix de la noció de producte. La interpretació geomètrica de Wessel expressa que el producte de dos segments coplanaris dóna com a resultat un altre segment coplanari, de longitud igual a la multiplicació aritmètica de les longituds dels altres dos. L'angle que marca la direcció del nou segment, mesurat prenent com a referència la unitat positiva de la recta real, serà igual a la suma dels angles que els altres dos segments fan amb la unitat real positiva. D'aquesta forma, el producte de direccions es transforma en una suma d'angles i s'assoleix per primera vegada un producte entre entitats matemàtiques de dues dimensions.

A partir del producte i prenent 1 com a direcció de l'eix horitzontal a 0° i (com la unitat perpendicular amb direcció 90°, es materialitza amb eixos coordenats la seva representació bidimensional. Lògicament -1 serà la unitat amb direcció 180° i $-\varepsilon$ farà el mateix amb 270°. Llavors, seguint la definició del producte de segments, es complirà $\varepsilon \cdot \varepsilon = -1$, obtenint una definició geomètrica significativa de l'arrel imaginària $\sqrt{(-1)} = \varepsilon$. A continuació Wessel observa que qualsevol segment del pla es pot representar analíticament com $a + \varepsilon b$, la qual cosa li permet definir el producte i el quocient d'imaginaris. La representació utilitzada per Wessel, connecta de forma molt fàcil $\cos v + \varepsilon \cdot \sin v$, expressió definida per Euler, amb la representació en polars d'un segment centrat a l'origen de radi 1 i angle v amb la recta real. Wessel realitza el càlcul de la potència i l'arrel n-èssimes trobats per De Moivre, on apareix la identificació d'un angle π amb 360°.

Una vegada definides les operacions algèbriques utilitzades i analitzat l'espai bidimensional, el pas següent serà estudiar l'espai tridimensional. Per analitzar la representació en tres dimensions, Wessel parteix de l'esfera com a figura fonamental, on defineix els tres eixos direccionals de l'espai. Els dos de l'espai bidimensional més un tercer perpendicular a tots dos alhora. Les tres direccions es defineixen analíticament com r, ηr, εr. Un punt qualsevol es podrà expressar segons $x + \eta y + \varepsilon z$, on es compleix $\sqrt{(-1)} = \varepsilon = \eta$. Les raons de per què fonamenta la seva descripció de l'espai tridimensional a partir d'una esfera, podrien trobar-se a la seva professió de cartògraf i a l'elaboració de plànols on era fonamental la consideració de l'esfericitat de la Terra.

Treballant amb la representació tridimensional, Wessel planteja l'operació de rotació al voltant d'un eix específic mitjançant x, ηy, εz, $(\cos I + \varepsilon \cdot \sin I)$, que representa una rotació del punt x, ηy, εz al voltant de l'eix z en un angle I. Els treballs realitzats sobre aquest tema, mostren que les operacions de rotació deixen invariant la component de l'eix sobre el qual efectuem la rotació, operant com un simple producte sobre les altres components. L'estudi de Wessel es centra sobretot a les rotacions respecte els eixos y i z, sense analitzar aquestes operacions respecte l'eix x. Aquesta operació és la més polèmica i confusa de tota la memòria ja que el mateix Wessel, analitzant la seva significació i operativitat, considera que té de manera imperfecta, la significació d'una multiplicació (Wessel, 1897: 59}. Resulta significatiu, però, que en aquesta part Wessel trenqui amb la regla d'or del seu mètode, ja que no és precisament una operació algèbrica definida, amb la qual cosa es perd rigorositat matemàtica. La generalització tridimensional d'aquesta operació matemàtica sobrepassà Wessel.

En suma, aquesta memòria és bàsicament, un treball de matemàtica aplicada, fonamentat en una exposició teòrica analítica basada en consideracions epistemològiques, que constitueix la primera obra substantiva sobre entitats multidimensionals.

3. J.-R. Argand, el precursor epistemològic

Fins passat molt de temps, es va creure que el primer a construir una representació geomètrica coherent dels nombres complexos, havia estat el suís Jean-Robert Argand (1768-1822). És per això que el seu assaig obrí el debat epistemològic, i provocà una sèrie de discussions als àmbits científics de l'època. Però tot i aquest paper central en les discussions, les errades de fonamentació matemàtica existents a l'exposició de l'assaig, impediren la plena acceptació de les seves idees per part de la comunitat matemàtica.

La intenció d'Argand a l'hora d'escriure l'assaig, consistia a interpretar les quantitats imaginàries per poder validar-les com a entitats matemàtiques amb sentit, tenint en compte que fins llavors eren considerades per nombrosos matemàtics com mancades de significat. L'obstacle de les concepcions helenistes de la geometria, així com una excessiva rigorositat per la manca d'exemplificació dels imaginaris havien portat a aquesta situació.

Argand connecta els imaginaris amb la idea ja expressada per Descartes (Boyer, 1986), de definir un pla bidimensional a partir d'entitats matemàtiques de dues components. La necessitat de representar el pla mitjançant dues coordenades donada la seva bidimensionalitat, unit a la connexió d'una d'aquestes amb la recta real, el porta a identificar l'altra amb les quantitats imaginàries. Respecte a l'exposició, es presenta la tesi de perpendicularitat de l'eix imaginari per després fonamentar-la matemàticament. És aquesta forma de treballar, la que ennuvola part de l'exposició i de la fonamentació, cosa que força les demostracions i presenta les idees de forma arbitrària. Si el comparem amb l'exposició analítica de Wessel, on tot sembla fluir de manera natural, el treball d'Argand se'ns presenta com menys rigorós o «modern» que el de Wessel.

L'operació matemàtica utilitzada per justificar la perpendicularitat respecte a la recta real del signe $\sqrt{(-1)}$, és la Llei de Proporcions aplicada a segments bidimensionals. La Llei de Proporcions era una operació del paradigma clàssic, definida per distàncies. La manca de definició a l'aplicació bidimensional fixa unes bases poc sòlides pels posteriors resultats. Per definir l'operació producte, Argand treballa amb segments de mòdul unitat i utilitza un altre cop la Llei de Proporcions. El resultat dóna un segment de longitud unitat i angle igual a la suma d'angles dels dos segments mesurats en sentit antihorari des de la unitat real positiva. La generalització al producte de segments és immediata tenint en compte el producte de longituds.

Destaquem els nombrosos desenvolupaments en sèrie de Taylor que apareixen a la memòria obtinguts mitjançant els nombres imaginaris. La pretensió d'Argand amb aquests càlculs és mostrar una teoria plena de contingut matemàtic, més si tenim en compte la idea de considerar que totes les funcions analítiques podien ser desenvolupades per una sèrie de potències, que es va conservar fins a mitjan segle XIX. Però precisament en alguns d'aquests desenvolupaments, podem observar que Argand necessita aproximar molt per a arribar a expressions generals.

4. Els *«Annales»* de Gergonne

Històricament, l'obra d'Argand va ser reconeguda gràcies a una comunicació publicada per J.-F. Français als *«Annales de Mathemátiques»* de Gergonne el 1813. A la seva comunicació, Français presenta un resum de la representació geomètrica dels complexos utilitzada per Argand. Al final d'aquesta comunicació reconeix haver recollit les seves idees d'una carta enviada per Legendre al seu germà, on el mateix Legendre al·ludeix a un matemàtic anònim, autor d'una representació geomètrica dels imaginaris. Français invita el veritable autor a donar-se a conèixer i la posterior resposta d'Argand als mateixos *«Annales»* constituirà el reconeixement del seu treball.

La primera obra publicada als *«Annales»* elaborada per Français, conté nombroses idees semblants a les d'Argand. S'observa la influència de les teories d'Argand en repetir defectes d'exposició, tot i que hem de reconeixer que algunes parts estan explicades amb més detall. A l'exposició de Français apareixen altres problemes de fonamentació teòrica, en utilitzar de manera acrítica i circumstancial relacions com $-1 = e^{\pm\pi\sqrt{-1}}$ o d'altres, ja obtingudes per Jean Bernouille. Fòrmules que en no quedar demostrades, deixen coixa la deducció posterior.

La posterior resposta d'Argand als *«Annales»*, va incloure un extracte revisat de les seves teories, on les exposicions apereixien més elegants i coherents. També podem observar l'adopció de la nomenclatura de Français. Però el més destacable és el seu curiós intent de descriure analíticament l'espai tridimensional. Treballant amb rotacions d'eixos, es defineixen angles imaginaris de la forma $\pm\alpha\sqrt{-1}$, que marquen la direcció del tercer eix, el qual s'expressarà com $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$. Aquesta representació, mancada de la perspectiva geomètrica de Wessel, no portarà a cap resultat significatiu.

En canvi, responent a la carta d'Argand, Français es planteja la representació tridimensional, utilitzant també angles imaginaris, però refusa $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ com a tercera direcció espacial. Tot i no arribar a obtenir cap expressió analítica coherent, és destacable als seus treballs la seva aproximació a les coordenades esfèriques. Français a diferència d'Argand, té les concepcions geomètriques d'una representació tridimensional però no les sap desenvolupar matemàticament.

La correspondència entre Argand i Français als *«Annales»*, va provocar polèmiques discussions epistemològiques als diferents ambients matemàtics de l'època. La primera reacció per a molts d'aquests, va ser de repúdia a les noves idees. És el cas de Servois, qui escrigué una carta als *«Annales»* criticant els treballs d'Argand i Français. Fets com aquest ens mostren la repulsa existent per una part dels matemàtics, tant als imaginaris com a la seva representació geomètrica. Amb tot, Servois es citat per Hamilton a *«Lectures on Quaternions»* al respecte d'interessants consideracions sobre anàlisi espacial (Argand, 1971: 108) (Hamilton, 1853: 57). També apareixen als *«Annales»* mencions a un dels matemàtics considerats històricament precursors de la representació imaginària, el francès emigrat a Anglaterra Abbe Buée.

Com a conclusió històrica, els treballs de Gauss i Argand respecte a la representació geomètrica dels imaginaris, permeteren una més àmplia acceptació dels nombres imaginaris (Boyer, 1986), i obriren nous camps d'investigació matemàtica.

5. Els imaginaris a l'Espanya del XIX. L'obra de José María Rey

Dins l'estudi històric dels nombres imaginaris, l'observació de la situació a Espanya, ens porta a trobar una curiositat bibliogràfica. Es tracta del llibre del cordobés José María Rey y Heredia (1818-1861), intitulat *«Teoría Trascendental de las Cantidades Imaginarias»*, amb data de 1861. Rey, nascut a Còrdoba, fou catedràtic de Psicologia i Lògica a l'*»Instituto del Noviciado de la Universidad de Madrid»* fins a la seva mort. Professor de Lògica i dominador d'altres disciplines, era un veritable apassionat de la Matemàtica.

Les tres idees fonamentals que apareixeran en el decurs de l'exposició són: a)el naixement de l'àlgebra com a ciència global; b) la influència del pensament kantià; c) la racionalitat dels conceptes matemàtics. Rey es mostra com un científic enlluernat per l'àlgebra, tractant-la com si fos la ciència absoluta del coneixement. És precisament l'àlgebra i la seva generalitat simbòlica, l'argument que utilitza Rey per a justificar l'estudi dels imaginaris.

Profundament impressionat amb la Filosofia Transcendental, Rey introdueix la teoria dels nombres imaginaris a partir del criticisme i la Lògica Transcendental de Kant. Rey arriba a considerar l'àlgebra com a abstracció mental matemàtica i ciència a priori, dintre de l'esquema filosòfic de la Filosofia Transcendental.

Així resulta comprensible que la tercera idea dominant en l'exposició, sigui la racionalitat dels enunciats matemàtics i la creença que el pensament científic posseeix veritats absolutes (Rey, 1865: 10).

Entre les seves influències, i segons declara el propi autor, el seu llibre està inspirat en els estudis del francès Buée (Rey, 1865: 4). L'ascendent de Buée s'observa fàcilment als desenvolupaments matemàtics fins arribar a convertir-se en un veritable obstacle degut a les mancances conceptuals de Buée. Les altres dues grans influències rebudes per Rey, provenen de la contribució dels *«Annales»* i de la branca britànica de l'*imaginarisme* (Warren, Peacock). Però al desenvolupament matemàtic, la influència dominant és la correspondència publicada als *«Annales»* per Argand, Français i Gergonne. En l'exposició s'utilitzen nombroses fórmules i expressions extretes de la revista francesa. Amb tot, Rey ignora Argand en favor de Français, mostrant, bé una manca de documentació, bé un error d'apreciació.

El principal problema que presenta el llibre de Rey, és la barreja confusa entre enunciats filosòfics i matemàtics que no sempre guarden la deguda connexió entre si. Això porta a la manca d'unicitat d'algunes operacions i definicions. Una mostra del caràcter confús de l'exposició, és la tardana justificació de la perpendicularitat del símbol $\sqrt{(-1)}$, que no apareix fins a l'últim llibre dels quatre que conformen l'obra. Entre els aspectes més positius, figura una admirable discussió del postulat de paral·lelisme d'Euclides, la interpretació de $\sqrt{(-1)}$ com una rotació o el desenvolupament en potències de l'exponencial imaginària, on utilitza un mètode personal (Rey, 1865: 264}.

En resum, el llibre de Rey sembla presentar mancances matemàtiques i metodològiques no alienes a la situació general de la ciència espanyola a mitjan segle XIX. Però també ens aporta tota una sèrie d'elements positius, com són la lluita per sortir de l'aïllament científic i bibliogràfic, o pretendre abordar des d'altres punts de vista, qüestions matemàtiques de gran complexitat, fonamentals en el desenvolupament de la matemàtica del segle XIX.

Bibliografia

ARGAND, J.-R. (1971), *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* 2a. de, Paris, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard.

BOYER, C. B. (1986), *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza Ed.

CROWE, M. J. (1967), *A History of Vector Analysis*, Notre Dame, University of Notre Dame Press.

HAMILTON, W. R. (1853), *Lectures on Quaternions*, Dublin, Hodges and Smith.

PLA, J. (1992), «The Fundamental Theorem of Algebra before Carl Friedrich Gauss», *Publicacions Matemàtiques, 36*, 879-911.

KANT, I. (1961), *Crítica de la Razón Pura,* Buenos Aires, Ed. Sopena.

LIZCANO, E. (1993), *Imaginario colectivo y creación matemática*, Barcelona, Gedisa Ed.

REY, J. M. (1865), *Teoría Trascendental de las Cantidades Imaginarias*, Madrid, Imprenta Nacional.

RÍBNIKOV, K. (1991), *Historia de las Matemáticas*, Moscú, MIR.

WESSEL, C. (1897), *Essai sur la représentation analytique de la direction*, 1ª traducció al francès, Copenhague, Bianco Luno, imprimeur de la Cour.